

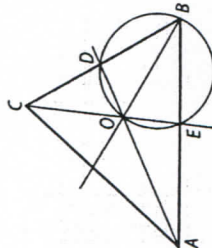
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовеће прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 51/3) Нека је S врх пирамиде, O центар основе, E средиште једне основне ивице и, као и обично, a основна ивица, b бочна ивица, h апотема и H висина пирамиде. Тада се добија $OE = \frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}h$, $OS = H = \frac{1}{2}h\sqrt{3}$, $a = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$, па из $39 = b^2 = \frac{1}{3}h^2 + \frac{3}{4}h^2 = \frac{13}{12}h^2$ следи $h = 6\text{cm}$ и $a = 2\sqrt{3}\text{cm}$ [10 поена]. Сада је $H = 3\sqrt{3}\text{cm}$ [5 поена] и $V = 54\text{cm}^3$ [5 поена].

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Последња цифра броја $2015x$ је 0 или 5, а последња цифра броја y^2 не може бити 2 ни 7. Дакле, последња цифра броја на левој страни не може бити 7 [10 поена]. Последње цифре бројева 2017^n су, редом, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ... Тј. понављају се с периодом 4, па је последња цифра броја 2017^{2017} иста као за 2017^1 , тј. једнака је 7 [10 поена]. Зато дата једнакост не може да важи.

3. *Прво решење.* Збир углова код темена A и C у $\triangle ABC$ једнак је 120° . Следи да је збир углова код истих темена у $\triangle AOC$ једнак 60° . Зато је $\angle DOE = \angle AOC = 120^\circ$ [6 поена]. Следи да је $BEOD$ тетивни четвороугао (збир углова код темена B и O је 180°) [6 поена]. Посматрајмо кружницу k описану око тог четвороугла. Трећа симетрала угла троугла ABC садржи такође тачку O и полови лук ED кружнице k . Како су лукови OD и OE једнаки, A следи да су и одговарајуће тетиве OE и OD једнаке [8 поена].



Друго решење. Из троугла ABD имамо $\angle ADB = 180^\circ - \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 120^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Слично је $\angle CEB = 180^\circ - \left(60^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = 120^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Како је $\angle ADB + \angle CEB = 120^\circ - \frac{\alpha}{2} + 120^\circ - \frac{\gamma}{2} = 240^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2} = 180^\circ$

то праве AB и CE заклапају исти угао као и праве BC и AD [10 поена]. Нека су F и G подножја нормала из тачке O на праве BC и AB тим редом. $OF = OG$ јер је O центар описане кружнице, а тачке F и G тачке додира те кружнице и одговарајуће стране троугла ABC . Троуглови OEG и ODF су подударни јер имају по један прав угао, једнаке катете и наспрам те катете једнаке углове. Следи да су им и хипотенузе OE и OD једнаке, одакле следи тврђење задатка [10 поена].

4. Из $x = \frac{-11y - 217}{5} = -2y - 43 - \frac{y+2}{5}$ се добија да мора бити $y + 2 = 5z$, где је z цео број, одакле је $y = 5z - 2$, $x = -11z - 39$, $z \in \mathbb{Z}$ [10 поена]. Обе вредности x и y ће бити негативне за $z \in \{0, -1, -2, -3\}$, тј. тражени број тачака је 4 [10 поена] [Одговарајуће тачке су $(-39, -2)$, $(-28, -7)$, $(-17, -12)$, $(-6, -17)$, али их није неопходно наводити. Ако се те тачке наведу, али се не докаже да их нема више бодовати са 10 поена.]

5. *Прво решење.* Укупан број троуглова чија су темена уједно темена датог десетоугла је $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ [5 поена]. Међу њима постоји 10 оних чије су две стране уједно (суседне)

стране тог десетоугла [5 поена], као и $10 \cdot 6 = 60$ оних чија је једна страна уједно страна десетоугла [5 поена]. Дакле, тражени број троуглова је $120 - 10 - 60 = 50$ [5 поена].
Друго решење. Означимо дати десетоугао са $A_1A_2 \dots A_{10}$. Посматрајмо троуглове чије је једно теме A_1 . Ако је друго теме A_i , за треће постоји 5 могућности; ако је друго A_4 , постоји 4 могућности; ...; ако је друго теме A_7 , постоји само једна могућност (A_8). Дакле, број таквих троуглова је $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ [10 поена]. Понављајући овај поступак добија се $15 \cdot 10 = 150$, али тиме је сваки троугао бројан трипут, па је тражени број троуглова $150 : 3 = 50$ [10 поена].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
25.03.2017.

VIII разред

- Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је $\sqrt{39}\text{cm}$, а апотема са равни основе заклапа угао од 60° . Колика је запремина те пирамиде?
- Докажи да не постоје природни бројеви x и y такви да је $2015x + y^2 = 2017^{2017}$.
- У троуглу ABC је $\angle ABC = 60^\circ$. Симетрала AD угла код A ($D \in BC$) и симетрала CE угла код C ($E \in AB$) секу се у тачки O . Докажи да је $OD = OE$.
- Колико има тачака у трећем квадранту xOy равни које припадају графику линеарне функције $5x + 11y + 217 = 0$, а чије су обе координате целобројне?
- Одреди број свих троуглова чије су све стране уједно дијагонале датог конвексног десетоугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.